TITLE:

The connection between projective embeddings and cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties (Algebraic Topology focused on Transformation Groups)

AUTHOR(S):

阿部, 拓

CITATION:

阿部, 拓. The connection between projective embeddings and cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties (Algebraic Topology focused on Transformation Groups). 数理解析研究所講究録 2018, 2060: 102-107

ISSUE DATE:

2018-04

URL:

http://hdl.handle.net/2433/241838

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 102-107

The connection between projective embeddings and cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties

阿部 拓
大阪市立大学 数学研究所

1 序

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列全体の成す空間として次のように定義される：

$$Fl(\mathbb{C}^n) = \{V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \mid V_i \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の線型部分空間で } \dim_{\mathbb{C}} V_i = i\}.$$

Hessenberg variety は旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n)$ の代数的部分集合であり，Springer fiber や Peterson variety，ルート系に付随するトーリック多様体といった，$Fl(\mathbb{C}^n)$ のよく知られた部分多様体を統一的に記述する.

特に regular nilpotent Hessenberg variety と呼ばれるものは，旗多様体と Peterson variety を含むクラスであり，旗多様体の幾何やトポロジーを自然に継承していることが近年の様々な研究から分かってきた．本稿では，regular nilpotent Hessenberg variety の射影埋め込みと特異コホモロジー環の関係について考察する．これは Lauren DeDieu 氏（McMaster 大学），Federico Galetto 氏（McMaster 大学），原田芽ぐみ氏（McMaster 大学）との共同研究である（[1]）.

2 Regular nilpotent Hessenberg variety

まず，[8] に基づいて，一般に Hessenberg variety を定義しておく [1]．A を複素数に値を持つ $n \times n$ の行列とし，$h : [n] \to [n]$ を次を満たす関数とする：

$$h(1) \leq h(2) \leq \cdots \leq h(n),$$
$$h(j) \geq j \quad (j \in [n]).$$

[1] ここでは A_{n-1} 型の定義のみを述べる．一般の Lie type での定義は [7, 9] を参照.

このとき，A と h に付随する Hessenberg variety $\mathrm{Hess}(A,h) \subseteq Fl(\mathbb{C}^n)$ は次のように定義される旗多様体の代数的部分集合である：

$$\mathrm{Hess}(A,h) := \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) \mid AV_j \subset V_{h(j)}\ (j \in [n])\}.$$

ここで，$V_\bullet = (V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n)$ である．A をべき零行列，h を恒等関数に取ったものは，Springer fiber と呼ばれ，対称群の幾何学的表現論において重要な役割を果たすことで知られている．ここでは少し別のクラスの Hessenberg variety を考察する．

そのために，$n \times n$ の行列 N を

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

とおく．N は regular nilpotent matrix または principal nilpotent matrix などと呼ばれる．このべき零行列 N から定まる Hessenberg variety $\mathrm{Hess}(N,h)$ を **regular nilpotent Hessenberg variety** と呼ぶ．

例えば，$h(j) = n\ (1 \leq j \leq n)$ の場合は $\mathrm{Hess}(N,h) = Fl(\mathbb{C}^n)$ であり，$h(j) = j+1\ (1 \leq j < n)$ の場合の $\mathrm{Hess}(N,h)$ は（A_{n-1} 型の）Peterson variety と呼ばれている．

$\mathrm{Hess}(N,h)$ は一般に特異性を持つ射影多様体であり，次のような性質を持つ．

命題 2.1. ([8], [4])

(1) $\mathrm{Hess}(N,h)$ は複素アフィン空間による *paving* を持つ．

(2) $\mathrm{Hess}(N,h)$ は既約で，次元は $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hess}(N,h) = \sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$.

性質 (1) より，$\mathrm{Hess}(N,h)$ の特異コホモロジーの奇数次部分は 0 であるが，実はさらに次が成り立つ．

命題 2.2. ([2]) $\mathbb{Q}$ 係数の特異コホモロジー環 $H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$ は次数 2 で生成されるポアンカレ双対代数であり，次のように記述される：

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n]/(f_1,\ldots,f_n)$$

ここで，各 x_i は $Fl(\mathbb{C}^n)$ の第 i 標準直線束の双対を $\mathrm{Hess}(N,h)$ に制限して得られる直線束の第一チャーン類を表し，また，$f_j := \sum_{k=1}^{j} x_k \prod_{\ell=j+1}^{h(j)}(x_k - x_\ell)$ である [2].

---

[2] $h(j)=j$ のときは $\prod_{\ell=j+1}^{j}(x_k - x_\ell) = 1$ と約束する．

例えば$n=3$で，$h(1)=2, h(2)=3, h(3)=3$ならば，コホモロジー環$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$は

$$\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_n]/(x_1(x_1-x_2),\ x_1(x_1-x_3)+x_2(x_2-x_3),\ x_1+x_2+x_3)$$

で与えられる．

3 ポアンカレ双対性と体積多項式

命題2.2より，$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$は次数2で生成されるポアンカレ双対代数なので，体積多項式とよばれる多項式のanihilatorを用いて書くことができる．すなわち，

$$m(h):=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hess}(N,h)=\sum_{j=1}^{n}(h(j)-j)$$

と書くとき，最高次の基底$e\in H^{m(h)}(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})(\cong\mathbb{Q})$をひとつ選び，$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$を変数とする多項式$V_h(\lambda)$を次の条件で定める：

$$(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n)^{m(h)}=V_h(\lambda)e\quad\text{for all }\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{Q}$$

このとき，

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}[\partial_1,\ldots,\partial_n]/\mathrm{Ann}(V_h(\lambda))\tag{2}$$

である．ここで，$\mathbb{Q}[\partial_1,\ldots,\partial_n]$は$\partial_1,\ldots,\partial_n$を変数とする$\mathbb{Q}$係数の（可換な）多項式環で，$\mathrm{Ann}(V_h(\lambda))$は各$\partial_i$を$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}$と見なして$V_h(\lambda)$に作用させると消滅するものからなるイデアル

$$\mathrm{Ann}(V_h(\lambda)):=\{g\in\mathbb{Q}[\partial_1,\ldots,\partial_n]\mid g(V_h(\lambda))=0\}$$

である．$V_h(\lambda)$はポアンカレ双対代数の**体積多項式**と呼ばれ[3]，(2)の意味で環$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q})$を完全に決定するものである．

命題 3.1. ([3]) 任意のhについて，次が成り立つ．

$$V_h(\lambda)=\left(\prod_{i>h(j)}\partial_{ij}\right)\prod_{1\le k<\ell\le n}\frac{\lambda_k-\lambda_\ell}{\ell-k}\tag{3}$$

ただし，$\partial_{ij}:=\frac{\partial}{\partial\lambda_j}-\frac{\partial}{\partial\lambda_i}$.

[3]最高次の基底eの選び方が定数倍の不定性を持っているので，体積多項式も定数倍の不定性を持つ．

さて，strict partition $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n)$ から定まる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の既約表現を V_λ と書くとき（[6]），$V_h(\lambda)$ の表示 (3) に現れる差積（$\mathrm{Hess}(N,h) = Fl(\mathbb{C}^n)$ のときの $V_h(\lambda)$）

$$\prod_{1 \le k < \ell \le n} \frac{\lambda_k - \lambda_\ell}{\ell - k} \tag{4}$$

は Plücker 埋め込み $Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^*)$ の下でのシンプレクティック体積である（射影空間の上の標準的なシンプレクティック形式を用いる）．今，(3) の $V_h(\lambda)$ の表示は任意の h で成り立つので，一般の h についても $V_h(\lambda)$ の意味付けを $\mathrm{Hess}(N,h)$ の幾何の言葉で与えたい．しかし，先で述べたように，$\mathrm{Hess}(N,h)$ は一般に特異性をもつので，シンプレクティック体積を代数幾何学の言葉で捉え直そう．

定義 3.2. 複素代数多様体 X の射影埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ について，埋め込みの次数を $\dim_{\mathbb{C}} X$ の階乗で割った数を，射影埋め込み $X \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ の**体積**と呼ぶ．

この定義を用いると，先ほど考察した差積 (4) は射影埋め込み $Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^*)$ の体積であるということができる．今，

$$\mathrm{Hess}(N,h) \subseteq Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^*)$$

により $\mathrm{Hess}(N,h)$ の射影埋め込みが得られる．これを $\mathrm{Hess}(N,h)$ の λ についての Plücker 埋め込みと呼ぶことにする．

以下で本研究の主定理を述べる．h は $h(j) \ge j+1$ $(1 \le j < n)$ を満たすことを仮定するが，$h(j) = j$ なる $1 \le j < n$ が存在する場合は，そのような j をもたない regular nilpotent Hessenberg variety の直積に分解することが分かっているので（[5, Theorem 4.5]），この仮定は一般性を失わない．

定理 3.3. ([1]) $h(j) \ge j+1$ $(1 \le j < n)$ とする．任意の *strict partition* $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n)$ について，(3) で与えられる $V_h(\lambda)$ は *Plücker* 埋め込み $\mathrm{Hess}(N,h) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^*)$ の体積である．

系 3.4. ([1],[3]) $h(j) \ge j+1$ $(1 \le j < n)$ とする．*Plücker* 埋め込み $\mathrm{Hess}(N,h) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^*)$ の体積 $V_h(\lambda)$ により，特異コホモロジー環は

$$H^*(\mathrm{Hess}(N,h);\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\partial_1, \ldots, \partial_n]/\mathrm{Ann}(V_h(\lambda))$$

と表される．

定理 3.3 の証明の詳細は [1] に譲ることにして，ここではその概略を説明する．$\mathrm{Hess}(N,h)$ は次のようにして，regular semisimple Hessenberg variety の平坦退化として書くことがで

きる．すなわち，互いに相異なる複素数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ を固定し，

$$\Gamma_t := \begin{pmatrix} t\gamma_1 & 1 & & & \\ & t\gamma_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & t\gamma_{n-1} & 1 \\ & & & & t\gamma_n \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{C}$$

とおく．このとき，

$$\mathfrak{X}(h) := \{(V_\bullet, t) \in Fl(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C} \mid \Gamma_t \subseteq V_{h(j)}\ (j \in [n])\}$$

を考えると，自然な射影

$$\pi : \mathfrak{X}(h) \to \mathbb{C} \quad ; \quad (V_\bullet, t) \mapsto t$$

があり，集合としては $\pi^{-1}(t) = \mathrm{Hess}(\Gamma_t, h)$ である．特に，$t \neq 0$ のファイバー $\mathrm{Hess}(\Gamma_t, h)$ は regular semisimple Hessenberg variety と呼ばれ，滑らかな射影多様体であり，$t = 0$ のファイバー $\mathrm{Hess}(\Gamma_0, h)$ はまさに $\mathrm{Hess}(N, h)$ そのものである．

$\mathfrak{X}(h)$ は代数多様体なので，自然なスキーム構造を持っており，その下で $\pi : \mathfrak{X}(h) \to \mathbb{C}$ をスキームの射と見ると，π は平坦射である．詳細は [1] に譲るが，実は π の（閉点のスキーム論的な）ファイバーは全て reduced であることが証明できる．$\mathfrak{X}(h)$ による平坦退化は $Fl(\mathbb{C}^n)$ の中で起きていると思うことができるので，Plücker 埋め込み

$$\mathrm{Hess}(\Gamma_t, h) \subseteq Fl(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda^*)$$

の体積は t に依存しないことが従う．

$\mathrm{Hess}(\Gamma_t, h)$ $(t \neq 0)$ は滑らかな射影多様体なので，射影埋め込みの体積はシンプレクティック体積そのものである．さらに $\mathrm{Hess}(\Gamma_t, h)$ は n 次元のトーラス作用を持っており，Atiyah-Bott の局所化公式を使うことで，(3) で与えられる $V_h(\lambda)$ がそのシンプレクティック体積であることを証明することができる．結果的に，$\mathrm{Hess}(N, h) = \mathrm{Hess}(\Gamma_0, h)$ の Plücker 埋め込みの次数は $V_h(\lambda)$ であることが従い，定理 3.3 が証明される．

参考文献

[1] H. Abe, L. DeDieu, F. Galetto, M. Harada, *Geometry of Hessenberg varieties with applications to Newton-Okounkov bodies*, arXiv:1612.08831.

[2] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, M. Masuda, *The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type A*, arXiv:1512.09072.

[3] T. Abe and T. Horiguchi and M. Masuda and S. Murai and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, arXiv:1611.00269.

[4] D. Anderson and J. Tymoczko, *Schubert polynomials and classes of Hessenberg varieties*, J. Algebra **323** (2010), no. 10, 2605-2623.

[5] E. Drellich, *Combinatorics of equivariant cohomology: Flags and regular nilpotent Hessenberg varieties*, PhD thesis, University of Massachusetts, 2015.

[6] W. Fulton. *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge.

[7] F. De Mari, C. Procesi and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties.* Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529-534.

[8] J. Tymoczko, *Linear conditions imposed on flag varieties*, Amer. J. Math. **128** (2006), no. 6, 1587-1604.

[9] J. Tymoczko, *Paving Hessenberg varieties by affines*, Selecta Math. (N.S.) **13** (2007), no. 2, 353-367.